

FAKTORISASI MATRIKS NON-NEGATIF MENGGUNAKAN ALGORITMA CHOLESKY BERBANTUAN SCILAB

HENDRA KARTIKA

Pendidikan Matematika, FKIP Universitas Singaperbangsa Karawang
e-mail: hendra.kartika@staff.unsika.ac.id

Abstrak. Tujuan dari penulisan makalah ini adalah untuk mengkaji faktorisasi matriks non-negatif menggunakan metode Cholesky. Metode ini memfaktorisasi suatu matriks simetri *positive-definite* menjadi dua matriks non-negatif. Langkah-langkah faktorisasi yang dilakukan menggunakan algoritma Cholesky. Selanjutnya, algoritma tersebut diterjemahkan kedalam bahasa pemrograman Scilab untuk mempermudah dan mempercepat perhitungan pada orde matriks yang sangat besar. Hasil memperlihatkan bahwa matriks non-negatif dapat difaktorisasi menggunakan metode Cholesky dengan ketentuan *symmetric positive definite* (SPD).

Kata kunci :Faktorisasi matriks, faktorisasi matriks non-negatif, metode Cholesky.

1. Pendahuluan

Faktorisasi pada bidang matematika merupakan permasalahan yang sering dijumpai pada konteks yang berbeda. Sebagai contoh, setiap bilangan bulat positif n , misal 36, dapat difaktorisasi menjadi perkalian dua atau lebih bilangan prima seperti $36 = 3^2 \times 2^2$. Selain itu, setiap polinom seperti $P(x) = x^2 + x - 6$ dapat difaktorisasi sebagai suatu hasil kali menjadi $P(x) = (x - 2)(x + 3)$ [5]. Pada makalah ini, dikaji tentang masalah faktorisasi pada matriks.

Faktorisasi matriks diperkenalkan oleh David Eisenbud pada 1980 [1] untuk memfaktorisasi polinom menggunakan matriks [3]. Faktorisasi matriks pada mulanya dikaji dalam konteks aljabar kommutatif [2]. Namun, dalam perkembangan saat ini, faktorisasi matriks banyak digunakan dalam bidang komputer seperti pada pengenalan ekspresi wajah, bidang biologi seperti pada pemetaan gen, dan lain-lain.

Masalah faktorisasi matriks ini berkaitan dengan jenis matriks, salah satunya adalah matriks non-negatif. Faktorisasi matriks non-negatif bertujuan untuk menentukan dua faktor matriks V sedemikian hingga $V \approx WH$, dimana W dan H matriks non-negatif dengan setiap elemen pada W dan H sama dengan atau lebih besar dari nol [9]. Metode ini memfaktorisasi sebuah matriks menjadi dua matriks lain yang tidak mengandung nilai negatif didalamnya [8]. Salah satu metode untuk memfaktorisasi matriks non-negatif adalah metode Cholesky.

Metode Cholesky merupakan metode faktorisasi matriks non-negatif yang diperkenalkan oleh André-Louis Cholesky pada 1924 dalam *bulletin Géodésique* [6]. Metode Cholesky merupakan metode yang memfaktorisasi suatu matriks simetri *positive-definite* menjadi dua matriks non-negatif. Metode ini memfaktorisasi matriks simetri A menjadi $A = L^T.L$, dimana L merupakan matriks segitiga atas dengan elemen diagonal bernilai positif [4].

Langkah-langkah faktorisasi matriks non-negatif yang dilakukan pada makalah ini adalah menggunakan algoritma Cholesky. Selanjutnya, algoritma tersebut diterjemahkan kedalam bahasa pemrograman Scilab. *Software* Scilab digunakan untuk mempermudah dan mempercepat faktorisasi matriks non-negatif untuk orde matriks yang sangat besar.

2. Hasil dan Pembahasan

Definisi 2.1. Matriks non-negatif adalah suatu matriks real atau integer $A = [a_{ij}]$ dimana untuk setiap elemen pada A merupakan bilangan non-negatif (sama dengan nol atau lebih besar dari nol) sedemikian hingga $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap $i, j = 1, \dots, n$ [10].

Definisi 2.2. Faktorisasi matriks non-negatif adalah algoritma yang memfaktorisasi matriks $V \in \mathfrak{R}_+^{n \times m}$ menjadi dua matriks non-negatif $W \in \mathfrak{R}_+^{n \times r}$ dan $H \in \mathfrak{R}_+^{r \times m}$ sedemikian hingga $V \approx WH$ [7].

Definisi 2.3. Suatu matriks $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ adalah matriks *symmetric positive definite* (SPD) jika hanya jika $A = A^T$ (simetri) dan untuk setiap vektor tak nol $x \in \mathfrak{R}^n$, maka $x^T Ax > 0$ untuk setiap $x \neq 0$.

Misal, A adalah matriks SPD, maka A dapat difaktorisasi menjadi $A = L^T L$. Untuk mendapatkan matriks $L = [l_{ij}]$, dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\
 l_{1j} &= \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad j = 2, \dots, n \\
 l_{jj} &= \sqrt{a_{jj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{sj}^2} \quad j = 2, \dots, n \\
 l_{pj} &= \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{pj} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{sj} l_{sp} \right) \quad p = j+1, \dots, n; j \geq 2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Atau dengan menggunakan Algoritma Cholesky seperti pada Gambar 7.4 berikut.

1. Misal, $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$.
2. Untuk $j = 2, \dots, n$, misal $l_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$.
3. Untuk $i = 2, \dots, n$,
 - {
 - Misal, $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}$, dan
 - Untuk $j = i+1, \dots, n$,
 - {
 - Misal, $l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj} \right) / l_{ii}$.
 - }
 - }

Gambar 2.1. Algoritma faktorisasi Cholesky

Contoh 2.1.

Faktorisasi matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 10 & 26 & 26 \\ 8 & 26 & 61 \end{bmatrix}$ menggunakan faktorisasi Cholesky!

Jawab.

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 2, \quad l_{12} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{10}{2} = 5, \quad l_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{8}{2} = 4.$$

$$l_{22} = \sqrt{(a_{22} - l_{12}^2)} = \sqrt{26 - 5^2} = 1,$$

$$l_{23} = (a_{23} - l_{13}l_{12})/l_{22} = (26 - 4 \cdot 5)/1 = 6,$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2} = \sqrt{61 - 4^2 - (6)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Sehingga, diperoleh matriks $L = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Jadi, hasil faktorisasi matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 8 \\ 10 & 26 & 26 \\ 8 & 26 & 61 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Untuk orde matriks yang sangat besar, dapat menggunakan algoritma Cholesky yang telah diterjemahkan ke dalam bahasa pemrograman Scilab seperti pada Gambar 2.2 berikut.

```
function L=cholesky(A)
n = size(A,1);
L = zeros(n,n);
L(1,1)=sqrt(A(1,1));
for j=2:n,
    L(1,j)=A(1,j)/L(1,1);
end
for i=2:n,
    jum1=0;
    for k=1:i-1,
        jum1=L(k,i)*L(k,i)+jum1;
    end
    L(i,i)=sqrt(A(i,i)-jum1);
    for j=i+1:n,
        jum2=0;
        for k=1:i-1,
            jum2=L(k,i)*L(k,j)+jum2;
        end
        L(i,j)=(A(i,j)-jum2)/L(i,i);
    end
end
endfunction
```

Gambar 2.2. Algoritma Cholesky dengan Scilab

Jika algoritma pada Gambar 2.2 dijalankan, maka akan seperti pada Gambar 2.3 berikut.

```
Scilab 5.5.2 Console

-->A=[4 10 8;10 26 26;8 26 61]
A =

    4.    10.    8.
   10.    26.   26.
    8.    26.   61.

-->exec('D:\Makalah\Algoritma\Cholesky\cholesky.sci', -1)

-->cholesky(A)
ans =

    2.    5.    4.
    0.    1.    6.
    0.    0.    3.

-->
```

Gambar 2.3. Faktorisasi Cholesky dengan Scilab

3. Kesimpulan

Matriks non-negatif dapat difaktorisasi menggunakan metode Cholesky dengan ketentuan *symmetric positive definite* (SPD). Selain itu, perhitungan Metode Cholesky dapat menggunakan bantuan Scilab dengan menerjemahkan algoritma Cholesky. Untuk penelitian selanjutnya, matriks non-negatif dapat diperluas dengan merubah unsur matriks, seperti unsur data biologi dan sebagainya.

Referensi

- [1] Cassidy, T., dkk. (2016). Periodic Free Resolution from Twisted Matrix Factorizations. *Journal of Algebra*, 455, 137-163.
- [2] Coward, A. (2017). *Matrix Factorization*. [online]. Diakses pada: <https://ncatlab.org/nlab/show/matrix+factorization>.
- [3] Crisler, D., & Diveris, K. (2016). *Matrix Factorizations of Sums of Squares Polynomials*. [online]. Diakses pada: <http://pages.stolaf.edu/diveris/files/2017/01/MFE1.pdf>.
- [4] Gentle, J.E. (2007). *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. New York: Springer.
- [5] Gilbert, J.E. (2015). *Factorization of Matrices*. [online]. Diakses pada: <http://www.ma.utexas.edu/users/gilbert/M340L/LA07MatrixDecompositions.pdf>.

- [6] Kreyszig, E. (2011). *Advance Engineering Mathematics (Tenth Edition)*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- [7] Laurberg, H. (2008). *Non-negative Matrix factorization: Theory and Methods*. Aalborg: Institut for Elektroniske Systemer, Aalborg Universitet.
- [8] Putra, A., dkk. (2012). *Pengenalan Ekspresi Wajah Menggunakan Metode Faktorisasi Matriks Non-Negatif dan Jaringan Syaraf Tiruan Propagasi Balik*. [online]. Diakses pada: <http://thesis.binus.ac.id/doc/ringkasanind/2012-1-00391-IF%20Ringkasan001.pdf>.
- [9] Sonneveld, P. (2008). *Nonnegative Matrix Factorization of a Correlation Matrix*. [online]. Diakses pada: <http://ta.twi.tudelft.nl/mf/users/oosterle/oosterlee/nonnegative.pdf>.
- [10] Weisstein, E. (2017). *Nonnegative Matrix*. [online]. Diakses pada: <http://mathworld.wolfram.com/NonnegativeMatrix.html>.