Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SESIOMADIKA) 2017 |
ISBN: 978-602-60550-1-9
Pembelajaran, hal. 132-139

PEMBELAJARAN MATEMATIKA BERBASIS KOMPUTER MENGGUNAKAN PERANGKAT LUNAK *MS EXCEL* DAN *R* (Studi kasus pada topik bahasan sistem persamaan linear tiga variabel dengan pendekatan matriks)

SOEKARDI HADI PRABOWO

Program Studi Matematika Fakultas Sainstek Universiatas Islam As-Syafi'iyah Jakarta
s.hadip@yahoo.co.id, - HP. 085284080059

Abstrak. Makalah ini mengkaji penbelajaran matematika berbasis komputer (PBK) menggunakan perangkat lunak *Excel*dan *R*,topik bahasan sistem persamaan linear dengan solusi melalui pendekatan operasi matriks.. m odel Pembelajaran PBK xsbagai upaya msnumbuhkan minat belajar dan mewujudkan pendekatan pembelajaran berpusat pada peserta didik. PBK, dapat meningkatkan kreativitas pendidik dalam mendesain pembelajaran yang efektif dan menyenangkan dalam rangka mewujudkan amanat pembelajaran kurikulum 2013 melalui pendekatan sainstifik mengamati, bertanya, mengumpulkan informasii, mngasosiasi dan mengkomunikasikan.

Kata kunci : PBK, *Excel, R*, Sistem persamaan linear, operasi matriks.

1. Pendahuluan

Perkembangan teknologi komputer yang sangat pesat berpengaruh dan memberi manfaat dalam kehidupan sehari-hari, termasuk bidang pendidikan. Sudah banyak paket prenagkat lunak (*software*) yang digunakan sebagai media pembelajaran matematika, tetapi sebagian besar masih bersifat tutorial dan latihan soal yang terkadang kurang sesuai dengan keinginan kita untuk mencapai target kurikulum. Selain itu aspek pendidik atau guru senagai perandang pembelajaran tidak terakomodir. Dalam makalah ini dijaji penggunaan *software MS Excel* melalui menu Formulas dan sub menu Math & Trig, serta *R* dalam eksplorasi pembelajaran. MS Excel merupakan rogram Speadsheet yang handal untuk berbagai perhitungan operaasi matriks. Sedangkan *Sotfware R* merupakan salah satu alat komputasi yang bersifat tidak komersial dan tidak memerlukan lisensi bagi pengguna serta lebih praktis, efektif dan efisien dibandingkan dengan *software* lainnya. Versi paling awal *R* dibuat tahun 1992 0leh *Ross Ihaka* dan *Robert Gentleman* (sebagai asal mula akronim *R* untuk *software* ini) dan diberikan secara gratis kepada masyarakat pengguna dengan cara mendown load melalui media internet (Roasdi dedi, [6]).

Pembatasan masalah dalam makalah ini, hanya melalukan kajian pembelajaran pada pokok bahasan sistem persamaan linear tiga variabel dengan pendekatan matriks, melalui solusi atau proses penyelesaian menggunakan metode Cramer yang menggunakan konsep determinan matriks dan metode Gauss jordan yang menggunakan konsep matriks invers.(Sutojo, [5]). Sistem persmaan linear merupakan salah satu bahasan matematika bidang aljabar, sebagai ilmu hitung yang diperkenalkan oleh Al kharizmi seorang ilmuwan muslim asal Uzbekistan (780-850 Masehi), melalui karyanya dengan judul Alkitaab Al-Muhtasar fi *Hisaab Al Jabrwa Wa al muqoabalah.* (Murtiningsih Wahyu, [3]).

Sistem persamaan linear (SPL) merupakan abstarksi model matematika yang merepresentasikan permasalahan fnomena nyata sehari-hari. Solusi atau penyelesaian dari SPL ini menggunakan pendekatan determinan dan invers matriks [1], Proses perhitungan menggunakan dua *software MS. Excel* dan *R*, dilakukan sebagai konfirmasi dari hasil perhitungan secara manual.

3. Hasil dan Pembahasan

Definisi Matriks 1.1. Matriks didefinisikan sebagai himpunan skalar yang disusun berdasarkan arah baris dan kolom, dibatasi oleh tanda kurung siku, serta dapat berbentuk persegi panjang dan persegi (Bujur sangkar) (Sutojo, [5]).

Matriks dapat dimanfaatkan dalam penyeliesaian masalah matematika pada pokok bahasan lainnya, di antaranya Sistem Persamaan linear. Pada makalah ini dibahas oprerasi matriks sebagai berikut :

a). Determinan Matriks berukuran 3×3 menggunakan metode Kofaktor.

Untuk memahami konsep kofaktor matriks, lebih dahulu perlu dipahami konsep dari Minor suatu matriks A (Raharjo darno, [4]).

Definisi 1.2. Minor matriks A Minor dari matriks A $= (a_{ij})$dilambangkan dengan M_{ij} yang merupakan determinan Matriks bagian (partisi) dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-enemen pada baris ke-i dan ke-j, dirumuskan

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{(i+1,j+1)} & a_{(i+2,j+1)} \\ a_{i+1,j+2)} & a_{(i+2,j+2)} \end{vmatrix} = a_{(i+1,j+1)} \times a_{(i+2,j+2)} - a_{i+1,j+2)} \times a_{(i+2,j+2)} \quad (1)$$

Maka determinan matriks A dirumuskan melalui definisi sebagai berikut :

Definisi 1.3. Determinan Matriks A dilambangkan $D_A = |A|$ dan dinyatakan melalui formula

$$D_A = |A| = +a_{11} \times M_{11} - a_{11}M_{12} + a_{13} \times M_{13} \quad (2)$$

dengan slalah satu minor misalkan $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times a_{23}$

b). Kofaktor Matriks A

Definisi. 1.4 Matriks Kofaktor Kofaktor suatu matriks A cdilambangkan $C(A)$ dan nilai komponennyan dirumuskan sebagai $K_{ij} = (-1)^{i+j} \times M_{ij}$.

Berdasarkan definisi 1.4, maka diperoleh matriks kofaktor berbentuk sebagai bwrukut

$$C(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \quad (3)$$

c). Invers matriks

Invers matriks A dinyatakan melalui definsisi sebagai berikut :

Definisi. 1.5. Invers matriks A diberi notasi $A^{-1} = \frac{i}{|A|} \times adj\,(A)$, sedangkan $adj\,(A)$, merupakan Transpose dari matriks kofaktor C(A), dimana daam buku matematika SMA kelas X [1], didefinisikan sebagai perubahan posisi elemen baris menjadi elemen kolom dalam suatu matriks bujur sangkar atau persegi, dinyatakan dengan menggunakan notasi $(C(A)),^T$. Sehingga dapat ditulis $adj\,(A) = (C(A)),^T$.

d). perkalian antara dua matriks $(C(A)),^T$

Operasi perkalian antara dua matriks A dan B, dinayatakam melalui definisi sebagai Berikut : (Rahardjo Darno, [4])

Definisi, 1.6. Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika banyak atau orde kolom matriks A sama
dengan banyak baris matriks B.

Dalam hal ini, jika matriks A berukuran $m \times k$ dan B berukuran $k \times n$, maka hasilnya akan diperoleh

$$A_{m\times k} \times B_{k\times n} = C_{m\times n} \tag{4}$$

Seluruh operasi matriks di atas dalam proses perhitungannya dapat dilakukan dengam menggunakan snbtaks format *excel* dan *script R*, yang disjikan pada Tabel. 1 sebgai berikut :

Tabel 1. Format *excel* dan *Script R* untuk Operasi matriks

No	Operasi matriks	Penulisan sintaks	
		Formst *Excel*	*Scrpt R*
1.	Determinan Matrks A	DA=MDETERM (B2:D4)	DA<-det(A)
2.	Partisi Matriks A barsi ke-i dan kilom ke-j	-	<-A[-i,-j]
3.	Partisi Matriks A barsi ke-i dan kolom ke-j	-	Ai<-A[-i,] dan Aj<-A[,-j
4.	Tarnspose Matriks C	CT=TTRANSPOSE(B2:D4)	ct<-t(C)
5.	Perkalian dua skalar a dan m	H=a*m	H<-a*m
6.	Perkalian dua matriks A dan G	=MMULT(A2:D4:G12:I4)	<-A%*%G
7.	Invers Matriks A	=MINVERS(B2:D4)	<-solve(A)

2.1 Sistem persamaan linear (SPL) Persegi 3 Variabel

Dinyatakan dalam suatu definisi. 1.7 (Lipschutz Seymour & Marc Lars, L, [2]) sebagai berikut:

Suatu SPL terdiri atas 3 persamaan linear L_1, L_2, L_3 dengan 3 variabel X_1, X_2, X_3 tidak diketahui, dapat dinayatakan dalam bentuk aljabar secara Umum

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{5}$$

SPL pada persamaan (50 dapat diungkapkan salam bentuk persamaan martiks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Disingkat dengan notasi matriks sebagai berikut :

$$A_{(3\times3)} \times X_{(3\times1)} = B_{(3\times1)} \tag{7}$$

dalam hal ini,

$A_{(3\times3)} = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3$ merupakan matriks koefisien persamaan
$X^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ merupakan matriks variabel berukuran 1×3
$B^T = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$ merupakan matriks variabel berukuran 1×3

Persamaan (7) dikatakan sistem persamaan linear bujur sangkkar atau persegi, jika dan hanya jika matriks A berbentuk bujur sangkar. Untuk penentuan penyelesian solusi nilai elemen matriks X^T, kita perlu memperhatikan teorema 1. Berikut ini : (Lipschutz Seymour & Marc Lars, L, [2]).

Teorema 1. Sistem persamaan linear bujur sangkar A.X = B, mempunyai solusi tunggal Atau unik jika determinan A, $|A| \neq 0$ atau matriks A non singular.

Terdapat beberapa metode solusi SPL yang dapat dikerjakan namun dalam makalah ini digunakan,

a). Metode Cramer, suatu proses penyelesaian atau solusi sistem persamaan linear, yang dilakukan berdasarkan pada pendekatan konsep determinan matriks koefisien dan matriks partisi-substitusi masing-masing variabel. (Sutojo, T, [5]), prosedurnya sebagai berikut :

1. Tentukan determinan matriks koefisien A, dinyatakan dengan D_A
2. Buat matriks parisi-substitusi untuk variabel X_j, dengan cara mengganti elemen kolom j dengan elemen matriks konstanta B. dinyatakan dengan notasi D_{Xi}
3. Tentukan determinan matriks $D_{Xi}, i - 1, 2, 3$
4. Tentu8kan nilai X_i dengan rumus

$$X_i = \frac{D_{Xi}}{D_A} \tag{8}$$

b). Gauss-jourdan, suatu proses penyelesaian atau solusi sistem persamaan linear, yang dilakukan berdasarkan pada pendekatan konsep invers matriks koefisien (Lipschutz Seymour & Marc Lars, L, [2]), prosedurnya sebagai berikut

1. Tentukan Minor dan kofaktor matriks koefisien A,
2. Tentukan determinan matriks A, D_A dengan memanfaatkan nilai determinan minor matriks menggunakan rumus (2)
3. Tentu8kan matriks X dengan rumus

$$X = A^{-1} \times B \tag{9}$$

2.2 Aplikasi *software MS Excel* dan *R* dalam proses solusi SPL

Eksploasi pembelajan pada topic Sistem persamaan linear tiga varibael dilakukan dengan pendekatan sainstifik, melalui prosedur sebagai berikut :

1). Peserta didik diminta untuk melakukan observasi atau pengamanatan fakta dari fenomena yang disajikan dalam slide pembelajan suatu perjalanan Sumatra Holyday's menawarkan paketm perjalanan ke Danau Toba, yaitu menginap di VIA Parapat hotel transportasi ke tiap lokasi (diasumsikan sama) dan makan di Riska singling restoran. Paket perjalanan yang ditawarkan diantaranya, Paket I terdiri atas menginap 4 malam, 3 lokasi wisata dan 5 kali makan dengan total biaya Rp 2.030.000,00. Paket II terdiri atas menginap 3 malam, 4 lokasi wisata dan 7 kali makan dengan total biaya Rp 1.790.000,00. Paket III terdiri atas menginap 5 malam, 5 lokasi wisata dan 4 kali makan dengan total biaya Rp 2.500.000,00.

Anda diminta untuk menentukan Biaya menginap di hotel per malam, rata-rata biaya transportasi ke lokasi wisata dan biaya satu kali makan.

2). Berdasarkan informasi di atas, peserta didik ditanya terkait dengan cara pembentukan formulasi model matematika yang dapat mengabstraksikan persoalan pada bagian 1), menentukan faktor- faktor yang diketahui mengenai matriks koefisien A dan matriks konstanta B, serta variabel yang ditanya nilainya.

ISBN: 978-602-60550-1-9
Pembelajaran, hal. 132-139

3). Mengumpulkan informasi dan mengaitkan dengan definisi dan teorema Hasil yang diperoleh, disajkan dalam sistem persamaan linear 3 variabel bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.030.000 \\ 1.790.000 \\ 2.500.000 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Dari persamaan (10) dapat dinayakan matriks koefidien A dan B, yang disajikan dalam format program MS. Excel sebagi berikut :

Lembar kerja Ecxel :

A	B	C	D	E	F
	4	1	5		2,030,000
A =	3	4	5	B =	1,790,000.00
	5	7	4		2,500,000

D_A =MDETERM (B2:D4) $\rightarrow enter$

Gambar.1 Data elemen matriks koefidien dan konstanta

Untuk menentukan solusi pada persamaan (10), melalui pendekatan determinan matriks menggunakan persamaan persamaan (8), dengan pengolahan data menggunakan *software MS.Excel*, dilakukan melalui prosedur :

1). Membuka program MS. Excel dan memasukkan matriks koefisien persamaan A dan konstanta B seperti pada tabel 1 di atas.

2). Menentukan nilai dari determinan matriks koefisien D_A, dengan cara memblok sel B7, kemudian menekan =→Formulas→Math & Trig, memilih MDETERM(B2:D4). Kilk Ok, diperileh nilai D_A, = -58

3). Dengan lebih dulu, mengganti elemen kolom pertama matriks koefisien A dengan elemen matriks konstanta, yang disajikan pada gambar 2. Sebagai berikut:

Lembar kerja excel,

A	B	C	D	E	F
	4	1	5		2,030,000
A =	3	4	5	B =	1,790,000.00
	5	7	4		2,500,000
					= 309375

D_{x1} =MDETERM →(B8:D10) →enter X_1

Gambar 1. Data elemen matriks A_{x1} dan matriks D_{x1}

3). Untuk menentukan nilai dari determinan matriks koefisien D_{x1}, dilakukan dengan cara meletakkan kursor pada sel B6, Selanjutnya menekan ==→Formulas→Math & Trig, dan memilih MDETERM(B8:D10) →menekan Ok (enter).maka diperoleh nilai D_{x1}=-20580000

4). Menentukan nilai x_1 menggunakan rumus 8, dengan format excel dilakukan cara Meletakkan kursor pada sel F12=→ $blok\ sel\ B_6/blok\ sel\ B_{12} \rightarrow enter$, maka akan diperoleh nilai x_1= 309.375

5). Dengan melakkan proses yang sama seperti di atas maka untuk matriks pada Range yang berbeda, maka akan diperoleh nila I x_2 = 69375 dan nilai dari x_3 = 116.875

Untuk pengolahan data menggunakan *software R*, dilakukan melalui prosedur :

```
> A<-matrix(c(4,3,5,3,4,7,5,5,4),ncol=3)
> B<-matrix(c(2030000,1790000,2500000), ncol=1)
> MK1<-matrix(c(B,A),3,4)
> MK3<-matrix(c(A,B),3,4)
> MK1
> DX1<-MK1[,-2]
> DX1
        [,1]    [,2] [,3]
[1,] 2030000    3    5
[2,] 1790000    4    5
[3,] 2500000    7    4
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    3    5
[2,]    3    4    5
[3,]    5    7    4
> X1<-det(DX1)/det(A)
> X1
[1] 309375
> MK2<-matrix(c(A[,1],t(B),A[,3]),ncol=3)
> MK2
     [,1]    [,2]  [,3]
[1,]    4 2030000    5
[2,]    3 1790000    5
[3,]    5 2500000    4
> X2<-det(MK2)/det(A)
> X2
[1] 69375
> MK3
> DX3<-MK3[,-3]
> DX3
     [,1] [,2]    [,3]
[1,]    4    3 2030000
[2,]    3    4 1790000
[3,]    5    7 2500000
> X3<-det(DX3)/det(A)
> X3
[1] 116875
> X<-cbind(X1,X2,X3)
```

```
> X<-solve(A)%*%b
> X
     [,1]
[1,] 309375
[2,]  69375
[3,] 116875
```

Melalui pendekatan invers matriks dengan menggunakan persamaan (9), melalui pengolahan data menggunakan *software MS.Excel*, dilakukan prosedur sebagai berikut:
1). Membuka program MS. Excel dan memasukkan matriks koefisien persamaan A dan konstanta B seperti pada tabel 1 di atas.
2). Menentukan nilai dari determinan matriks koefisien D_A, dengan cara memblok sel B7, kemudian menekan =→Formulas→Math & Trig, sebelumnya memblok range (C(:E11) dan memilih =MINVERS(B2:D4), .lalu mengKilk Ok, hasilnya disajikan pada range (B6:D8).
3). Melakukan proses perkalian matriks, dengan cara memblok range (C15:17), diikuti dengan menekan menu Formulas →Math &Trig, memilih MMULT(B2:D4:G4:G6).
Untuk pengolahan data menggunakan *software R*, dilakukan melalui prosedur sebagai berikut:

```
> A1<-c(4,3,5)
> A2<-c(3,4,7)
> A3<-c(5,5,4)
> A<-matrix(c(A1,A2,A3),ncol=3)
> B<-matrix(c(2030000,1790000,2500000),ncol=1)
> AI<-solve(A)
> X<-AI%*%b
> X
     [,1]
[1,] 309375
[2,]  69375
[3,] 116875
```

Diperoleh nilai $x_1 = Rp\ 309.375,-$; $\mathrm{x}_2 = \mathrm{Rp}\ 69.375{,}00$ $\mathrm{x}_3 = \mathrm{Rp}\ 116.875{,}00$.

Proses perhitungan dengan pengolahan data menggunakan *software MS.*Excel dan *R*, merupakan langkah mengasosiasi untuk memperluais pemahaman konsep matriks, sistem persamaan dan operasi hitung aljabar.
Tahap akhir pada pembelejaran dengan pendekatan sainstifik adalah mengomikasikan, dengan cara menarik kesimpulan hasil analisis perhitungan sebagai berikut :

Dengan demikian diperoleh biaya menginap satu malam di VIA Parapat hotel Sebesar Rp 309.375,00 dan biaya rata-rata transportasi ke lokasi wisata Rp 69.375,00 seerta biaya satu makali makan Rp 116.875,00.

4. Kesimpulan

Dengan melakukan konfimrasi hasil perhitungan manual melalui proses perhitungan menggunakan *software MS Excel* dan *R*, berdasarkan hasil pembahasan pada bagian 2, dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika pada topik bahasan sistem peramaan linear tiga variabel, dengan penentuan nilai solusi melalui pendekatan matriks, diperoleh informasi bahwa penggunaan *software* R lebih praktis, efisien dan fleksibel di bandingkan dengan penggunaan *software MS Excel* pada pembelajaran berbasis komputer untuk mata pelajaran matematika bidang aljabar.

Referensi

[1] Kemdikbud RI (2014). *Matematika XI,* edisi revisi. Balitbang: Jakarta

[2] Lipschitz, S & Marc lars, L (2012). *Linear Algebra*. Mc graw-Hill Companies: New york.

[3] Murtiningsih, W (2011). *Para PendekarMatematika dari Yunani hingga Persia*. *Diva* Pers: Yogyakarta.

[4] Raharjo Darno (2010), *Matematika 3 I.* Duta Grafika: Bogor.

[5] Sutojo, T dkk (2017),*Aljabar Linear dan Matrik,* Andi offset: Yogyakarta