ISBN: 978-602-60550-1-9
Statistika, hal. 36-41

MODEL PREDIKSI DENGAN BINOMIAL POISSON INAR(1) DAN TRINOMIAL POISSON INAR(2)

KARUNIA EKA LESTARI[1], MOKHAMMAD RIDWAN YUDHANEGARA[2], NESSA[3]

[1, 2, 3]Program Studi Doktor Matematika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha No. 10 Bandung
[1] karunia.eka.lestari@s.itb.ac.id
[2]mridwan.yudhanegara@s.itb.ac.id
[3]nessa.tanzil@gmail.com

Abstrak. Model Poisson INAR(1) telah banyak digunakan untuk memprediksi nilai ekspektasi bersyarat jika diketahui nilai awal. Pada artikel ini akan disajikan pengamatan model berdasarkan observasi dengan proses kedatangan berdistribusi Poisson, dan prediksi dibuat berdasarkan fungsi prediktif untuk h-langkah ke depan. Secara spesifik, selanjutnya akan ditentukan prediksi 1-langkah dan 2-langkah ke depan menggunkan model Binomial Poisson INAR(1) dan model Trinomial Poisson INAR(2) dengan menggunakan metode Klasik.

Kata kunci : Binomial Poisson INAR(1); Trinomial Poisson INAR(2); taksiran titik; metode Klasik

1. Pendahuluan

Proses INAR(1) $\{X_t; t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ didefinisikan dengan persamaan

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \epsilon_t, t \epsilon \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

dimana $0 < \alpha < 1$ $\{\epsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak saling bebas dan berdistribusi identik, dengan $E[\epsilon_t] = \mu_\epsilon$, $Var[\epsilon_t] = \sigma_\epsilon^2$. Jika $\epsilon_t \sim POI(\lambda)$, jelas bahwa $X_t \sim POI(\lambda/(1-\alpha))$. Dalam kehidupan sehari-hari, proses INAR(1) dapat diilustrasikan sebagai berikut:

X_t	=	$\alpha \circ X_{t-1}$	+	ϵ_t
Populasi pada waktu *t*		*Survivors* pada waktu $t-1$		Kedatangan/imigrasi pada waktu *t*

Model Binomial Poisson INAR(1)

Fungsi pembangkit momen untuk X_{n+h} jika diketahui X_n, sebagai berikut:

$$\varphi x_{n+h}|x_n(s) = \left[\alpha^h e^s + \left(1-\alpha^h\right)\right]^{x_n} \exp\left[\lambda\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}(e^s-1)\right] \quad (2)$$

Dapat dilihat dari persamaan di atas bahwa distribusi dari $X_{n+h}|X_n$ adalah distribusi binomial dengan parameter α^h dan X_n adalah distribusi Poisson dengan parameter $\lambda\left(1-\alpha^h\right)/(1-\alpha)$. Sehingga, fungsi peluang dari $X_{n+h}|X_n$ adalah:

$$f(x_{n+h}|x_n) = P(X_{n+h} = x_{n+h}|X_n = x_n)$$

$$= exp\left\{-\lambda\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}\right\}\sum_{i=0}^{M_h}\frac{1}{(x_{n+h}-i)!}\times\left(\lambda\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}\right)^{x_{n+h}-i}\binom{x_n}{i}\left(\alpha^h\right)^i(1-\alpha^h)^{x_n-i}$$

dengan $x_{n+h} = 0,1, \ldots$, dan $M_h = \min(X_{n+h}, X_n)$.

Dengan demikian, didapat pula beberapa sifat berikut:

1. $E[X_{n+h}|X_n] = \alpha^h \left[X_n - \frac{\lambda}{1-\alpha}\right] + \frac{\lambda}{1-\alpha}, h = 1,2,3, \ldots,$
2. $Var[X_{n+h}|X_n] = \alpha^h(1-\alpha^h)X_n + \lambda\frac{1-\alpha^h}{1-\alpha}, h = 1,2,3, \ldots,$
3. Jika $h \to +\infty, X_{n+h}|X_n$ adalah distribusi Poisson dengan parameter $\lambda/(1-\alpha)$

Sehingga, untuk α konstan,

$$\lim_{h\to+\infty} E[X_{n+h}|X_n] = \lim_{h\to+\infty} Var[X_{n+h}|X_n] = \lambda/(1-\alpha)$$

ketika $h \to \infty$ dan $0 < \alpha < 1$, mean dan variansi dari $X_{n+h}|X_n$ menjadi sama dan mendekati mean dari proses Poisson.

Prediksi untuk h-langkah ke depan berdasarkan ekspektasi bersyarat INAR(1):

$$\hat{X}_{n+h}|x_n = E[X_{n+h}|X_n] = \alpha^h \left[X_n - \frac{\lambda}{1-\alpha}\right] + \frac{\lambda}{1-\alpha}, h = 1,2,3, \ldots$$

model ini dikenal sebagai model klasik yang diperkenalkan oleh Brannas (1994) dan dikembangkan oleh Freeland dan McCabe (2003).

Model Trinomial Poisson INAR(2)

Model umum untuk INAR(1) dikenal dengan nama INAR(p), didefinisikan melalui persamaan berikut:

$$X_t = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \circ X_{t-j} + \epsilon_t \qquad (3)$$

dimana X_t adalah peubah acak diskrit berdistribusi identik dan saling bebas, dan ϵ_t adalah peubah acak bernilai integer yang saling bebas dengan X_t.

Representasi dari peluang bersyarat $P(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})$ untuk model INAR(p) dengan distribusi Poisson (dikenal sebagai INAR(p)-P) adalah:

$$P(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}) = \sum_{i_1=0}^{\min(X_{t-1},X_t)} \binom{X_{t-1}}{i_1} \alpha_1^{i_1}(1-\alpha_1)^{X_{t-1}-i_1} \sum_{i_2=0}^{\min(X_{t-2},X_{t-i_1})} \binom{X_{t-2}}{i_2} \alpha_2^{i_2}(1-\alpha_2)^{X_{t-2}-i_2}$$

$$\cdots \sum_{i_p=0}^{\min[X_{t-p},X_{t-(i_1+\cdots+i_{p-1})}]} \binom{X_{t-p}}{i_p} \alpha_p^{i_p}(1-\alpha_p)^{X_{t-p}-i_p} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X_{t-(i_1+\cdots+i_{p-1})}}}{[X_t - (i_1+\cdots+i_{p-1})]!}$$

Dengan demikian, ekspektasi dan variansi bersyarat dari INAR(p)-P yaitu:

$$E\left(X_t|X_{t-1},\dots,X_{t-p}\right)=\mu_\varepsilon+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k X_{t-k}$$

$$Var\left(X_t|X_{t-1},\dots,X_{t-p}\right)={r_e}^2+\sum_{k=1}^{p}\alpha_k(1-\alpha_k)X_{t-k}$$

Secara spesifik, jika $p=2$ pada INAR(p), terdapat dua tafsiran berbeda. Model INAR(2)-DL mencari proses menghitung (*counting series*) sedemikian sehingga peubah acak *thinning* $\{\alpha_1\circ X_{t-j},\alpha_2\circ X_{t-j}, j\in\mathbb{N}, t\in\mathbb{Z}\}$ saling bebas. Proses INAR(2)-DL stasioner selama $\alpha_1+\alpha_2<1$, dan ekspektasi bersyarat untuk satu langkah ke depan secara linier dapat dilihat dari:

$$\hat{X}_{t+1}=E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)=\alpha_1X_t+\alpha_2X_{t-1}+b$$

dengan $\mathcal{F}_t=\sigma\{X_t,X_{t-1},\dots\}$. Dengan demikian, prediksi satu langkah ke depan untuk model ini diperoleh dengan menghitung nilai prediksi biasanya bernilai real, bukan integer, kecuali pada kasus-kasus yang sangat langka.

Model INAR(2)-AA diperkenalkan oleh Alzaid dan Al-osh (1990). Perbedaan utama INAR(2)-AA dengan INAR(2)-DL terletak pada operasi *thinning*-nya. Secara spesifik, untuk setiap selang waktu $t-j$, dan bersyarat dengan X_{t-j}, dipilih $(\alpha_1\circ X_{t-j},\alpha_2\circ X_{t-j},X_{t-j}-\alpha_1\circ X_{t-j}-\alpha_2\circ X_{t-j})$ yang mengikuti distribusi trinomial dengan parameter $(X_{t-j};\ \alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1-\alpha_2)$.

Oleh karena itu, model Binomial Poisson INAR(1) dapat dikembangkan menjadi model Trinomial Poisson INAR(2) sebagai berikut:

$$X_t=\alpha\circ X_{t-1}+\beta\circ X_{t-2}+\epsilon_t \tag{4}$$

2. Hasil dan Pembahasan

Model Prediksi dengan Metode Klasik

Pada bagian pendahuluan telah dijelaskan mengenai prediksi h-langkah ke depan. Pada bagian ini akan secara khusus membahas tentang penentuan *point prediction* untuk 1-langkah dan 2-langkah ke depan menggunakan Binomial Poisson INAR(1) dan Trinomial Poisson INAR(2) dengan metode Klasik. Penentuan *point prediction* untuk 2-langkah dilakukan dengan menentukan *point prediction* untuk 1-langkah terlebih dahulu.

Model Prediksi 1-Langkah dan 2-Langkah untuk Binomial Poisson INAR(1)

Fungsi peluang $f(x_{n+1}|x_n)$ dan $f(x_{n+2}|x_n)$ didefinisikan sebagai

$$f(x_{n+1}|x_n)=P(X_{n+1}=x_1|X_n=x_0)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\min(x_0,x_1)}\frac{1}{(x_1-i)!}(\lambda)^{x_1-i}\binom{x_0}{i}(\alpha)^i(1-\alpha)^{x_0-i}$$

$$f(x_{n+2}|x_n)=P(X_{n+2}=x_2|X_n=x_0)$$
$$=e^{-\lambda(1+\alpha)}\sum_{i=0}^{\min(x_0,x_2)}\frac{1}{(x_2-i)!}(\lambda(1+\alpha))^{x_2-i}\binom{x_0}{i}(\alpha^2)^i(1-\alpha^2)^{x_0-i}$$

Sehingga diperoleh ekspektasi bersyarat $E[X_{n+1}|X_n]$ dan $E[X_{n+2}|X_n]$ yaitu:

$$E[X_{n+1}|X_n=x_0]=\alpha\left[x_0-\frac{\lambda}{1-\alpha}\right]+\frac{\lambda}{1-\alpha}$$
$$E[X_{n+2}|X_n=x_0]=\alpha^2\left[x_0-\frac{\lambda}{1-\alpha}\right]+\frac{\lambda}{1-\alpha}$$
$$Var[X_{n+1}|X_n=x_0]=\alpha(1-\alpha)x_0+\lambda$$
$$Var[X_{n+2}|X_n=x_0]=\alpha^2(1-\alpha^2)x_0+\lambda(1+\alpha)$$

Model Prediksi 1-Langkah dan 2-Langkah untuk Trinomial Poisson INAR(2)

Fungsi peluang $f(x_{n+1}|x_n)$ dan $f(x_{n+2}|x_n)$ didefinisikan sebagai

$$f(x_{n+1}|x_n) = P(X_{n+1} = x_1|X_n = x_0) = \sum_{i=0}^{\min(x_0,x_1)} \binom{x_0}{i}(\alpha)^i(1-\alpha)^{x_0-i}\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^{x_1-i}}{(x_1-i)!}$$

$$f(x_{n+2}|x_n) = P(X_{n+2} = x_2|X_{n+1} = x_1, X_n = x_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\min(x_1,x_2)} \binom{x_1}{i}(\alpha)^i(1-\alpha)^{x_1-i} \sum_{j=0}^{\min(x_0,x_2)} \binom{x_0}{j}(\beta)^j(1-\hat{a})^{x_0-j}\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^{x_2-(i+j)}}{(x_2-(i+j))!}$$

Dengan Ekspektasi bersyarat $E[X_{n+1}|X_n]$ dan $E[X_{n+2}|X_n]$ adalah

$$E[X_{n+1}|X_n = x_0] = \alpha\left[x_0 - \frac{\lambda}{1-\alpha-\beta}\right] + \frac{\lambda}{1-\alpha-\beta}$$
$$E[X_{n+2}|X_{n+1} = x_1, X_n = x_0] = \alpha\left[x_1 - \frac{\lambda}{1-\alpha-\beta}\right] + \beta\left[x_0 - \frac{\lambda}{1-\alpha-\beta}\right] + \frac{\lambda}{1-\alpha-\beta}$$
$$Var[X_{n+1}|X_n = x_0] = \alpha(1-\alpha)x_0 + \lambda$$
$$Var[X_{n+2}|X_{n+1} = x_1, X_n = x_0] = \alpha(1-\alpha)x_1 + \beta(1-\beta)x_0 + \lambda$$

3. Kesimpulan

Berikut ini disajikan hasil simulasi untuk memprediksi 1-langkah dan 2-langkah ke depan menggunakan Binomial Poisson INAR(1) dan Trinomial Poisson INAR(2) dengan $\alpha = 0{,}2; \lambda = 1 \text{ dan } 3, \beta = 0{,}35$. Perhatikan studi kasus mengenai banyaknya pasien di suatu rumah sakit. Pada kasus Binomial Poisson INAR(1), asumsikan bahwa banyaknya pasien pada satu dan dua hari kemudian dipengaruhi oleh banyaknya pasien yang bertahan pada hari ini (dengan peluang α) dan banyaknya pasien yang baru datang (dengan laju λ). Sementara itu, pada kasus Trinomial Poisson INAR(2), asumsikan bahwa banyaknya pasien pada satu dan dua hari kemudian dipengaruhi oleh banyaknya pasien yang bertahan (dengan peluang α), banyaknya pasien yang meninggal dunia (dengan peluang β), banyaknya pasien yang dalam masa pemulihan (dengan peluang $(1-\alpha - \beta)$), dan banyaknya pasien pasien yang baru datang (dengan laju λ). Penentuan prediksi banyaknya pasien satu dan dua hari kemudian disajikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

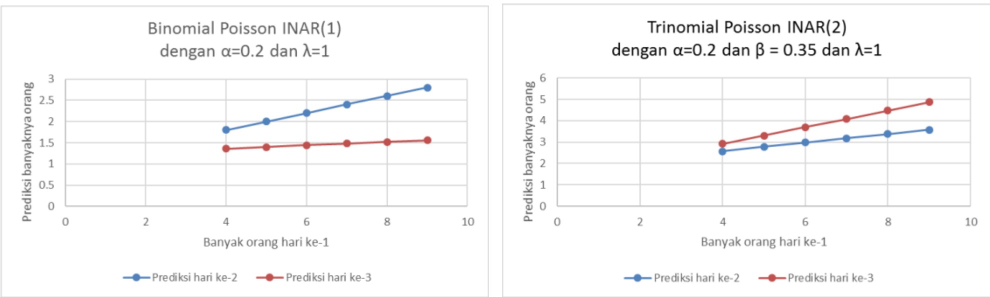
Tabel 1. Predisi Banyaknya Pasien

Binomial Poisson INAR(1) $\alpha = 0{,}2; \lambda = 1$			Trinomial Poisson INAR(2) $\alpha = 0{,}2; \beta = 0{,}35;\ \lambda = 1$		
X_0	X_1	X_2	X_0	X_1	X_2
4	1,8	1,36	4	2,577778	2,915556
5	2	1,4	5	2,777778	3,305556
6	2,2	1,44	6	2,977778	3,695556
7	2,4	1,48	7	3,177778	4,085556
8	2,6	1,52	8	3,377778	4,475556
9	2,8	1,56	9	3,577778	4,865556

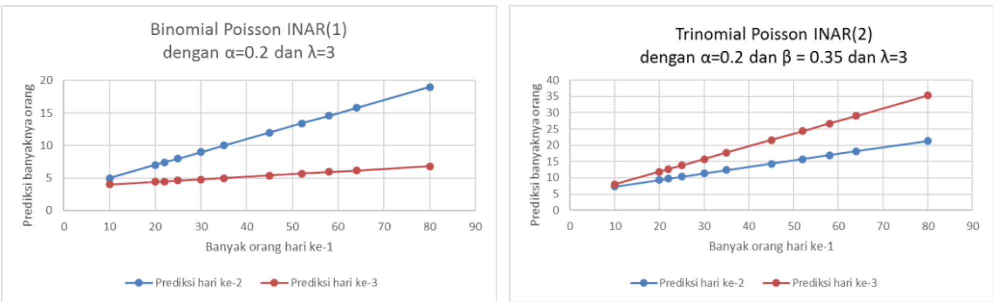
ISBN: 978-602-60550-1-9

Tabel 2. Predisi Banyaknya Pasien

Binomial Poisson INAR(1) $\alpha = 0{,}2; \lambda = 3$			Trinomial Poisson INAR(2) $\alpha = 0{,}2; \beta = 0{,}35; \lambda = 3$		
X_0	X_1	X_2	X_0	X_1	X_2
10	5	4	10	7,333333	7,966667
20	7	4,4	20	9,333333	11,86667
22	7,4	4,48	22	9,733333	12,64667
25	8	4,6	25	10,33333	13,81667
30	9	4,8	30	11,33333	15,76667
35	10	5	35	12,33333	17,71667
45	12	5,4	45	14,33333	21,61667
52	13,4	5,68	52	15,73333	24,34667
58	14,6	5,92	58	16,93333	26,68667
64	15,8	6,16	64	18,13333	29,02667
80	19	6,8	80	21,33333	35,26667



Gambar 1. Prediksi Pasien dengan λ=1



Gambar 2. Prediksi Pasien dengan λ=3

Referensi

[1] Bu, R., and McCabe, B. (2008). Model Selection, estimation and Forecasting in INAR (p) models: a likelihood-based Markove Chain Approach. *International Journal of Forecasting,* 24(1), 151-162

[2] Chesnean, C., and Maher, K (2012). A Parametric Study for First-oerder Signed Integer-valued Autoregressive Process. *Journal of Statistical Theory and Practise*, 6(4), 760-782

[3] Kachour,M. (2009).p_Order Rounded Integer-valued Autoregressive (RINAR(p)) Process. arXiv preprint arXiv: 0902.1598

[4] Kachour, M., and Yao, J. (2009) First-order Rounded Integer-valued Autoregressive (RINAR(1)) Process. *Journal of Time Series Analysis*, 30(4),417-448

[5] Silva, N., Pereira, I., and Silva,M. (2009). REVSTAT. *Statistical Journal*, 7(1), 119-134